3104　ボロノイ図に基づく平坦折り可能な折り線図の設計支援システム
A system for flat-foldable pattern design based on the Voronoi diagram

三谷 純（筑波大学）

Jun MITANI, University of Tsukuba, Tennohdai, Tsukuba-city, Ibaraki

It is known that the crease patterns of origami tessellations based on twist folds are generated by applying a simple geometrical operation, shrink and rotate, to the tiling patterns with polygons which have a geometric property of Maxwell's reciprocal figure. We propose an interactive system for designing the origami tessellations with symmetry by using voronoi diagrams. The system provide an interface for assigning valid and symmetrical mountain and valley flags to foldings.

Key Words: Origami, Voronoi diagram, Flat-foldable

1. はじめに

1 枚の紙を折ることで形を作る折紙の技術は，ものを小さく折りたたむ技術と密接な関係を持ち，工業分野でも広く活用されている[1]．平面を折ることに関する諸問題の多くは，幾何学的な問題に帰着することができ，折紙は長い間数学の分野で研究されてきた．近年では計算機を用いて折紙の形状設計や折り手順の推定，形状変形の様子の提示などの研究が盛んになり，Computational Origami と呼ばれる分野が注目されている．折紙には，1 枚の紙を切らずに折るだけで形を作る，という厳しい制約があるため，自由な形を作り出すことは困難であるが，曲線折りを含む様々な設計手法の研究により，従来の伝承的な折紙とは一線を画すような，複雑な形状を 1 枚の紙から折り出すことが可能となっている．

本稿では，1 枚の紙を平坦に折りたたむ「平坦折り」を対象とし，そのなかでも，幾何学的な折り構造が周期的に表れる「平織り（Origami Tessellation）」のパターンの設計手法について述べる．本稿で提案する手法は，ボロノイ図を基本とし,「ねじり折り」操作に基づく平坦折りを扱う．

2. 平織りの基礎

2.1 平織り

紙を折ることで生まれる幾何学的な造形を楽しむ分野の一つに，平織りと呼ばれるものがある．図 1 に示す例のように，平織りには幾何学的な基本構造を並べることで平面を充填させる特徴がある．

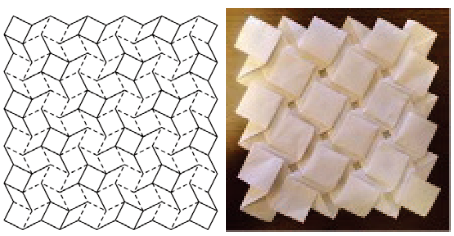

図 1 平織りの例．展開図（左）と折った後の写真（右）

平織りに現れる周期模様はモザイク柄のように見え，光を透かせて陰影を楽しむこともできる．このような折り技法は，服飾に用いられるプリーツにも見られ，古くから多くのパターンが知られている．近年ではコンピュータを用いた展開図の設計も可能となっている[2]．平坦に折りたたまれるものが多いが，立体的な構造を持つ折り模様が今も多くの愛好家によって創作されている[3]. 以降に述べる「ねじり折り」を含む平織りの多くは，全体の折り線が相互にリンクしており，折るときには一度に全体を折る必要がある．そのため，実際には折りたたむことが困難なことが多い．

2.2 ねじり折り

正方形をベースとしたねじり折りは，図 2 に示すような折り線から構成され，一般的な折紙用紙から容易に折り出すことができる．図 2 左に示す展開図では 45 度傾いた正方形が中央に置かれ，水平，垂直方向に折り線が伸びている．これを折りたたむと，図 2 右のようになるが，この際に中央の正方形が反時計回りに 90 度回転する．紙をねじるようにして折りたためるのでねじり折りと呼ぶ．

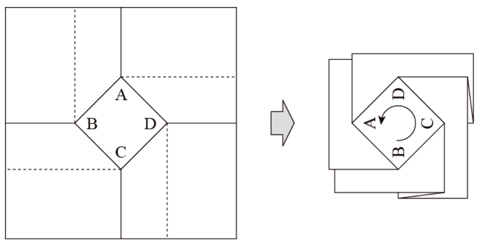

図 2 正方形を基本としたねじり折り

2.3 ねじり折りの連結

図 2 に示したねじり折りは，一方を鏡映反転することで図 3 のように連結できる．この連結したパターンは互いに干渉することなく，整合性を保ったまま折りたたむことができる．互いに連動するため，実際に折るときには，両方を同時にねじるようにして折りたたむ．一方は他方の鏡像であり，ねじる方向は逆になる．

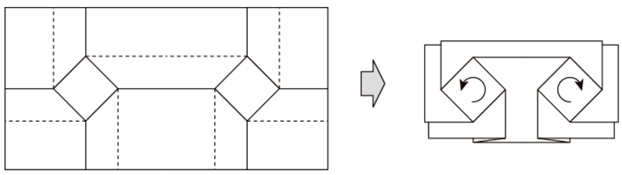

図 3 ねじり折りの鏡像の連結.

図 3 のパターンを水平線で鏡映反転して連結すると図 4 のパターンができる．中央部に大きな閉領域ができるが，これも問題なく折りたためる．

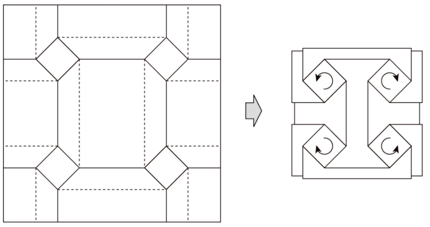

図 4　4 つのねじり折りの連結.

以上の考察から，正方形を基本とするねじり折りはいくつでも連結でき，平面上に敷き詰められることがわかる．互いに隣接するねじり折りは，一方が他方の鏡像になる．これが平織りの 1 つの例となる．

また，図 6 のように折り線の位置はそのままにして，平行移動させて連結することもできる．その際に，折り線の山谷の符号を反転させる．一方の正方形は裏側に現れることになる．

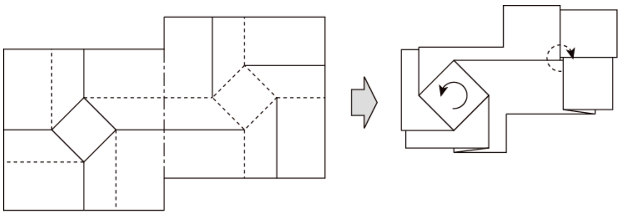

図 6.　山谷が反転した 2 つのねじり折りの連結.

このようなパターンもやはり連結を繰り返して平面を充填できる．4 つ連結させると図 7 のようになる．図 4 の鏡像を用いたものと異なり，裏と表は区別なく同じになる．

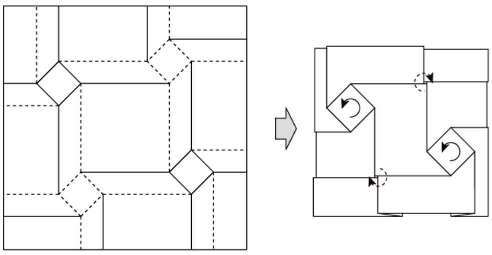

図 7.　山谷が反転した 2 つのねじり折りの連結.

2.4 正方形のねじり折りを基本としたパターンのバリエーション

図 2 のねじり折りは平坦に折りたためる．平坦に折りたたまれる展開図の頂点に注目すると，1 つおきの内角の和が 180 度であるという法則（川崎定理）がある．図 2 の頂点 A に関して，正方形の内部から反時計回りに 90 度，45 度，90 度，135 度であり，この法則が成り立つことを確認できる．基本となる中央の多角形が正方形であるため最初の 90 度は固定であり，それと対を成す角も 90 度で固定となる．残りの角に注目すると，これは 45 度と 135 度に限定されない．一方を θ とすると，他方は 180°-θ となり，θ の値は自由に設定できる．例として，正方形の傾きを変えて θ を 20 度にした場合は図 8 のようになる（折った後の図は隠れて見えない折り線も表示している）．角度を小さくすると，重なる領域が小さくなり，裏側には正方形の隙間が生まれることになる．

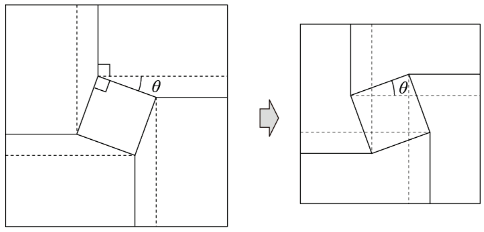

図 8 中央の正方形の傾きを変えたねじり折り.

傾きの角度を変えたねじり折りのパターンも，これまでの例と同様の方法で連結し，平面上に敷き詰められる．このバリエーションは，基本となる正方形の大きさと，回転させる角度 θ の値という 2 つのパラメータで形を決定できる．

図 8 のねじり折りに，2.1 節で述べた鏡像パターンを連結する方法（図 5）を適用すると，折った後の裏側は興味深い外観になる．図 9 に示すように，1 枚の紙を折っただけでありながら，まるで複数の帯が互いに違いに交差した織物（文字通り「平織り」の外観）のように見える．

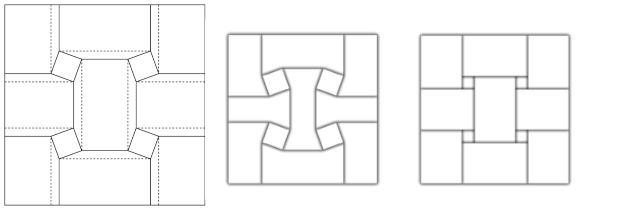

図 9　図 8 のねじり折りを 4 つ連結したパターン．左から展開図，表面，裏面.

2.5 正三角形，正六角形をベースとしたねじり折りのバリエーション

正方形のねじり折りの配置で，異なる平織りのパターンを作れることを確認したが，平面を敷き詰められる正多角形には，正方形のほかに正三角形と正六角形がある．そのため，図 10 に示すねじり折りも，これまでと同様にして平面を充填できる．

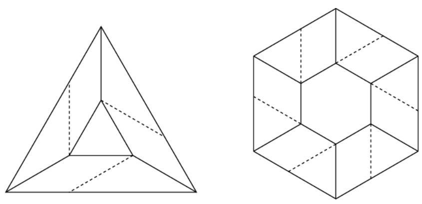

図 10 正三角形, 正六角形のねじり折りの基本パターン.

正三角形と正六角形，それぞれを敷き詰めたタイリングパターンは双対の関係であるため，図 10 の基本パターンを敷き詰めて得られるものは結果としてどちらも図 11 に示すものになる．正三角形のねじり折りと正六角形のねじり折りが混在していることがわかる．

正三角形を平面に敷き詰めると 1 つの頂点に 6 つのタイルが接続するため，山谷の反転または鏡映のパターンを交互に配置できる．一方で，正六角形の場合は 1 つの頂点に 3 つのタイルが接続するので，山谷反転または鏡映のパターンを交互に配置できず，図 10 とは異なる山谷の付け方で折りたたむことになる．

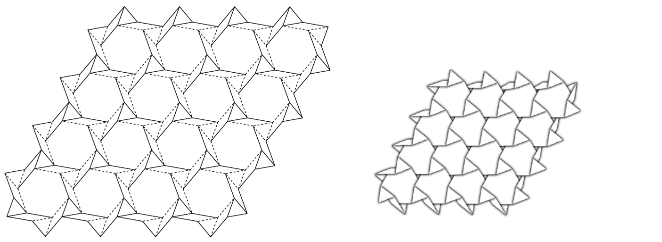

図 11 正三角形と正六角形のねじり折りから作られる平織りのパターン（左）と，それを折りたたんだ様子（右）.

2.6. 異なる正多角形によるタイリング

これまでは,同一の多角形を敷き詰めて作るパターン(正平面充填形と呼ぶ）に基づく平織りを見てきた．異なる正多角形の組み合わせによる平面充填のパターン（Uniform Tiling）からも平織りを作り出すことができる．異なる正多角形を敷き詰めてできるタイリングについても，図 12 に示す「縮小して回転させる」という手順で，平らに折りたたまれる展開図を作れることが知られている[4]．まず，平面に敷き詰めた各正多角形を，その重心を中心として同じ比率で縮小する．すると隙間ができるので，もともと同じ場所にあった頂点同士を連結して，新しい多角形を作る（同じ場所にあった頂点が 4 つの場合は四角形が作られる）.続いて,縮小した多角形を一定角度だけ回転させる(新しく作った多角形もそれに合わせて回転する).このようにして作られたパターンは，各頂点が局所平坦折り条件を満たし，平坦に折りたたむことができる．このアプローチで平織りの展開図を生成できるソフトウェア Tess がインターネット上で公開されている[2].

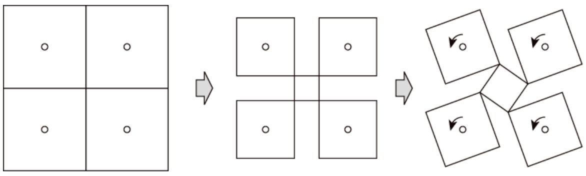

図 12 縮小して回転させる操作.

正多角形の組み合わせで平面を充填するタイリングパターンの中で，すべての頂点の形状が一様なパターン（アルキメデスの平面充填）は正平面充填形を含めれば全部で 11 種類ある．頂点の形状が一様でなくてもよいのであれば，それらは無数にある．したがって，この「縮小して回転させる」という驚くほど簡単な操作で，無数の平織りパターンを生成できる．

この「縮小して回転させる」という操作で平織りパターンを作る方法は，非常に強力であり，「隣接する 2 つのタイルの回転中心を結ぶ線と，2 つのタイルが接する辺の成す角が 90 度である」という条件を満たせば，どのような形のタイルの組み合わせでも実現可能なことが近年に Lang らによって示された[5].

無限に広い平面を充填するには，何かしらの周期性が必要になるが，ボロノイ図はこのような条件を満たしているため，図 13 に示すようなランダムな点から生成したボロノイ図からも,「縮小して回転させる」という操作で平坦に折りたためる折り線を生成できる．

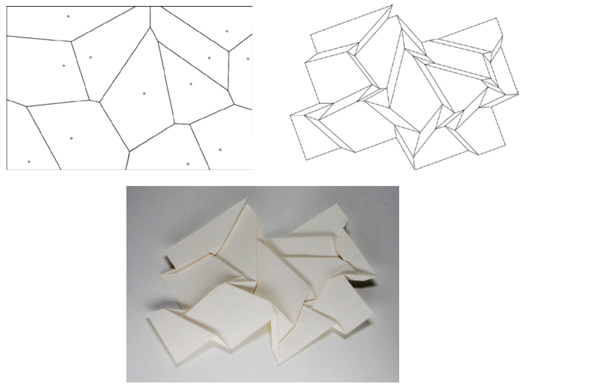

図 13 ランダムな点群から生成したボロノイ図（左上)，各多角形を 30%縮小させて 20 度回転させて作った展開図（右上)，展開図を折りたたんだ様子（下).

3. 提案システム

本稿では，前章で述べたねじり折り構造を基本とする平織りを，対話的にデザイン可能とするユーザインタフェースを持つシステムを提案する．対象とする形状はボロノイ図をベースとしたもので,「縮小して回転させる」手法を用いて展開図を生成する．

従来のソフトウェアを用いた平織りの設計では，正多角形のタイリングに基づくものが多かったが，ボロノイ図を対象とすることで，より変化に富んだパターンの生成が可能となる．一方で，ボロノイ図で意匠性に富んだ形状を生成するためには，対話的な試行錯誤や，対称性の付与が容易に行える必要がある．

ボロノイ図は，母点の集合から一意に定まり，その図は Lang らの示す条件を満たす．このボロノイ図のための母点を対話的に操作することで，平織りのパターンの生成を試行錯誤可能となる．また，対象とするデザインに回転対称を与えることで，幾何学的なパターンが持つ美しさで大きな役割を持つ対称性を持たせる．これにより，簡単な操作で幾何学的な対称性を持つパターンを生成できる．

3.1 ボロノイ図の生成

ユーザは初期状態で与えられた正方形領域の内部に，母点をマウスクリックで入力することにより，ボロノイ図を生成する．母点は，対話的に追加，削除，マウスドラッグによる移動が可能であり，リアルタイムにボロノイ図が更新される．規則性を与えるために，母点は既定の格子点にスナップできるようにした．

回転対称なパターンとするために，何回の回転対称とするかを表す整数のパラメータ N をユーザが指定できるものとした．与えられた母点を，360/N 度ずつ，N 回回転させて全体のパターンを生成する．N が 4 のときは 4 回回転対称であり，N が 1 のときはユーザが入力した点そのものが母点の集合となる．

3.2 折り線の生成

初期に与えられる正方形領域内にボロノイ図を生成したのち，タイルを縮小して回転させる．この縮小率と回転角度はパラメータで与えることが可能である．縮小後，図 12 に示すように，同一の頂点を共有していた点どうしを連結することを行う．

3.3 山谷の割当

一般に平坦に折りたためる山谷の割当の方法は複数ある．

しかし，縮小と回転で得られる展開図では，すべての内部頂点に 4 本の折り線が接続するため，割当の条件が限定される．前川定理より，山折りと谷折りの本数は，それぞれ 3，1 または 1，3 の組み合わせのどちらかである．また，川崎定理より鋭角を挟む折り線の組は山と谷であり，鋭角を挟まない折り線の組は山と山，または谷と谷の割当となる．

そのため，内部頂点に着目した場合，可能な組み合わせは図 14 に示す 4 通りに限定される．

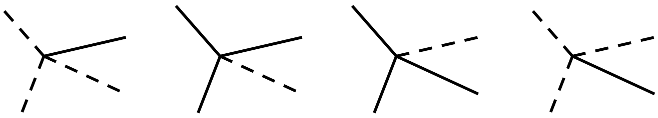

図 14 4 本の折り線が接続する場合の，平坦折り可能な山谷の割当

この条件を満たすように，山谷の割当てを深さ優先の探索で決定し，最終的に矛盾のない割り当て結果を正解として出力する．また，対称性から，対称な位置に存在する折れ線には，同じ符号がわりあてられるようにすることで，場合の数を減らすことができる．山谷の割当は，最終的な見た目に影響を与えるため，ユーザが全部または一部を指定することも可能とした．得られた展開図は，折りたたみ形状を推定するプログラム ORIPA[6]に渡すことで，折った後の予測形状を出力することができる．

4. 結果

本稿で提案するシステムを，PC 上に Java 言語を用いて実装した．提案手法を実装したシステムで生成した結果の例を図 15 に示す．それぞれ，5 回および 7 回の回転対称を持ち，通常の折紙から手作業で折り出すことは困難なパターンである．母点は中心に 1 つと，それ以外に 3 点のみ指定し，残りは対称性から自動生成された．リアルタイムに母点の位置を操作でき，展開図のパターンもリアルタイムに生成された．山谷の割当は，ユーザが一部指定した．

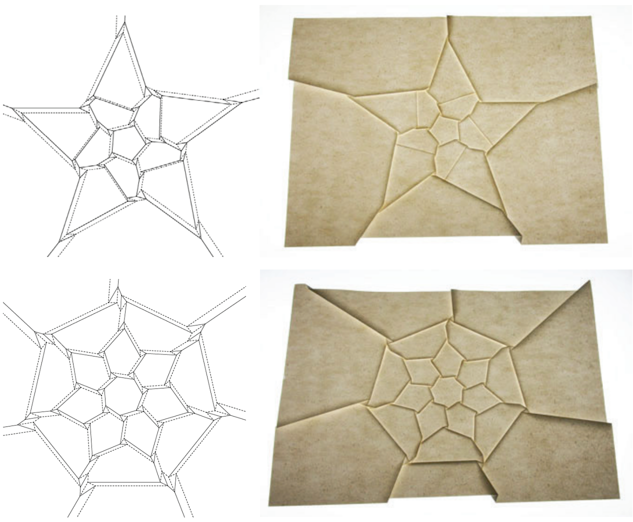

図 15 提案システムで設計した折紙．展開図（左）と，折った後の写真（右）

5. まとめと展望

対話的な操作と，対称性の付与により，対称構造を持った新しい平織りのパターンをインタラクティブに生成できるようになった．対称性を付与することで，見た目に美しい幾何学的なパターンを容易に作り出すことができた．

ねじり折りは，剛体折りできないパターンであり，実際に紙を折って制作する工程においては，紙にねじりが発生する．また，平坦であるのは，最初の開いた状態と，折り終わった後の状態のみで，折っている途中では立体的な形となる．そこで，元の折り線パターンを構成する一部の直線を曲線に代えることで，立体的な曲面を含む構造とすることができる．幾何学的な制約を満たすよう，精確に計算すべきだが，直観に基づいて手作業で適当な曲線を生成した．幾何学的には成り立ちえない形状かもしれないが，折り曲げと，最終的な糊付けによる固定の時に歪みが吸収され，図 16 に示すような立体的な形状を作り出すことができた．

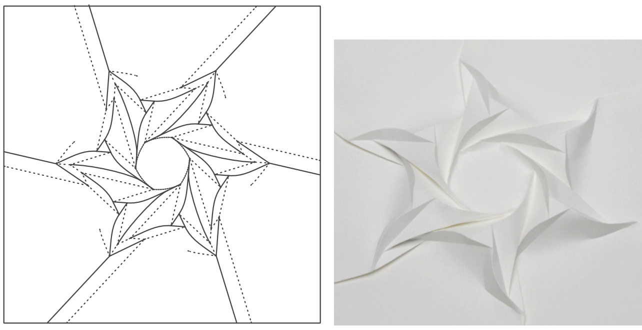

図 16 曲線での折りを含む立体的な例

ねじり折りでは，全体が連動するため局所的に折ることができない．これが，実際の制作を困難にしており，複雑なパターンが設計できても，実際に折ることは難しいことが多い．今後の発展として，この難易度を事前に評価し，それほど無理せずに折れる程度のパターンを作れようにすることが考えられる．また，上で述べた曲線を含む折りのパターンについては，まだほとんどのことがわかっていない，研究の余地のある分野である．

また，本稿で用いたボロノイ図は「縮小して回転させる」方法で平織りにできるパターンの一部に過ぎない．ボロノイ図生成後に，さらにユーザによる編集操作を許容することで，形のバリエーションを増やすことができると考えられる．

参考文献

[1] 日本応用数理学会(監修)，"立体折りと産業応用"，折り紙の数理とその応用，4 章，共立出版（2012）

[2] Alex Bateman, Tess: origami tessellation software, http://www.papermosaics.co.uk/software.html

[3] Origami Tessellations, http://www.flickr.com/groups/origamitessellations/

[4] アレックス・ベイトマン，平織り（折り紙テッサレーション）デザインのためのコンピュータ・ツールとアルゴリズム，折り紙の数理と科学，Thomas Hull 編，森川出版，第 12 章（2005）

[5] Robert J. Lang, Alex Bateman, Every Spider Web Has a Simple Flat Twist Tessellation, Origami⁵, CRC Press, pp.455-473 (2011)

[6] Jun Mitani, ORIPA: Origami Pattern Editor, http://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/oripa/